القسم: رياضيات — الفصل الأول

السنة: الثالثة — المادة: ميكانيك 121

المحاضرة: السادسة عملي

مسألة: صفيحة مربعة الشكل ABCD تتحرك في المستوي بحيث يبقى قطرها AC موازي المحور ox وكان الدوران للصفيحة بحيث أن رأسها A يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها R. المطلوب حدد نوع الحركة ومسار النقطة C واحسب سرعة وتسارع نقطة ما من هذه الصفيحة

الحل:

بما أن AC يوازي المحور ox

فإن الحركة انسحابية لذا نحسب

سرعة النقطة A ولتكن V(A)

$$\vec{OA} = R\cos\alpha\,\vec{i} + R\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{V}(A) = \frac{d}{dt}\vec{OA}$$

$$\vec{\Gamma}(A) = \frac{d}{dt}\vec{V}(A)$$

$$\Rightarrow \vec{V}(A) = R[-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}]$$

$$\vec{\Gamma}(A) = R[-\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}]$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$ (نحسبها حسب معطيات المسألة)

$$= R\cos\alpha\,\vec{i} + R\sin\alpha\,\vec{j} + \sqrt{2}\,a\,\vec{i}$$

[illegible]

$$\Rightarrow (R\cos\alpha + \sqrt{2}a)\vec{i} + R\sin\alpha\,\vec{j} = \vec{OC}$$

$$x(c) = R\cos\alpha + \sqrt{2}a \Rightarrow x(c) - \sqrt{2}a = R\cos\alpha$$

$$y(c) = R\sin\alpha \Rightarrow y(c) = R\sin\alpha$$

نربع ثم نجمع:

$$\Rightarrow (x(c) - \sqrt{2}a)^2 + y^2(c) = R^2$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها R ومركزها $(\sqrt{2}a, 0)$

مسألة:

قضيب OA طوله l يتحرك في المستوي الثابت OXY بالشروط الآتية

ساكن والمطلوب:

1) احسب سرعة وتسارع النقطة A

2) نجعل OA يتحرك بحيث يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الفاصل لـ OXY مباشرة

عندئذ أوجد سرعة وتسارع النقطة A

x_1
y_1
l
A
θ
o

الحل:

OXY جملة مقارنة ثابتة، و OX_1Y_1 جملة متماسكة مع القضيب

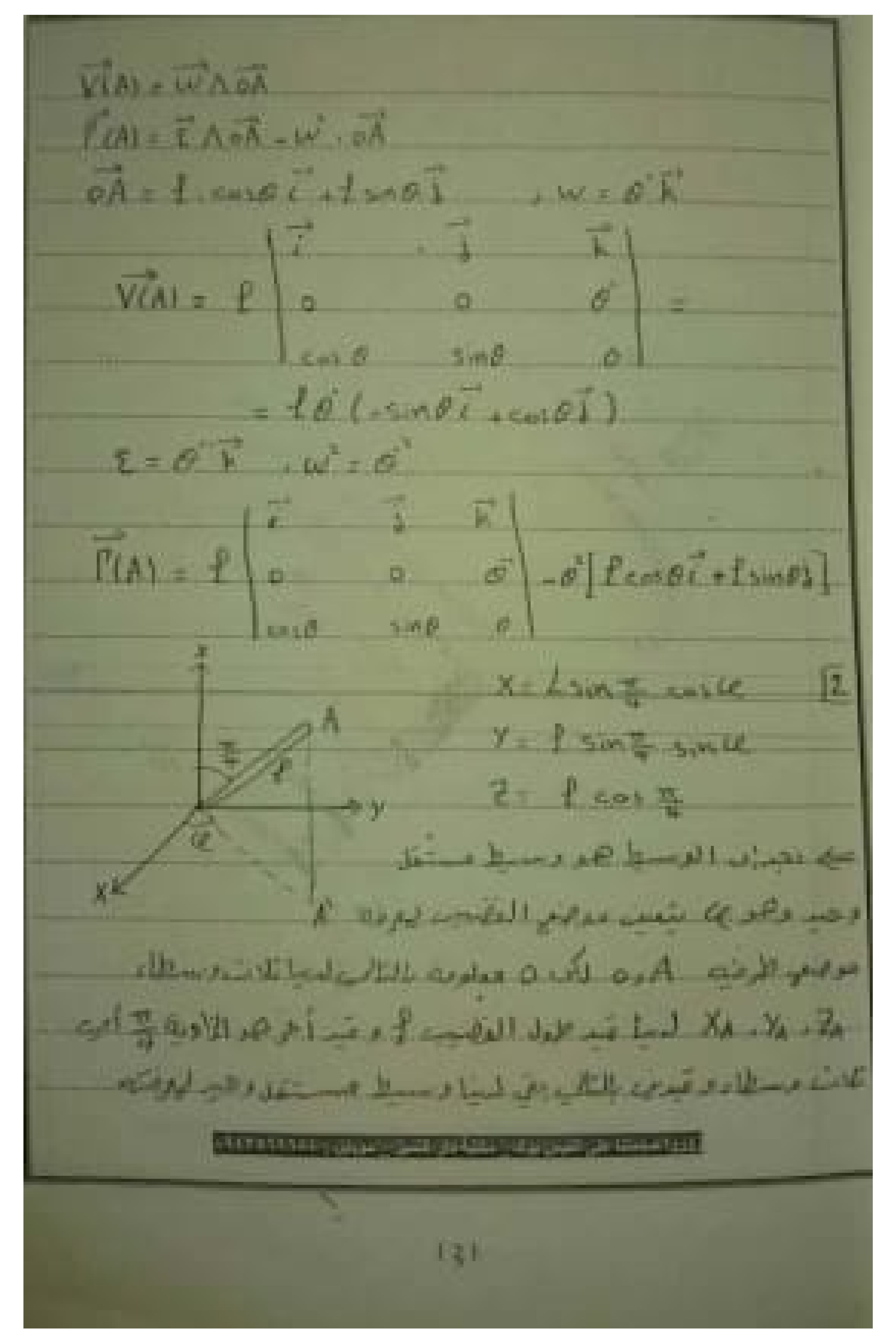
بحيث OX_1 ينطبق على استقامة القضيب و OY_1 عمودي عليها

القضيب يتحرك حركة دورانية في المستوي ويتعين موضعها بوسيط واحد

مستقل وهو وسيط زاوية الدوران θ.

حساب سرعة النقطة A.

[illegible]



$\vec{V}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$

$\vec{\Gamma}(A) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OA} - \omega^2 \cdot \vec{OA}$

$\vec{OA} = \ell \cos\theta \, \vec{i} + \ell \sin\theta \, \vec{j} \quad , \quad \vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$

$$\vec{V}(A) = \ell \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \ell \dot{\theta} \left(-\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} \right)$$

$\varepsilon = \ddot{\theta} \vec{k} \quad , \quad \omega^2 = \dot{\theta}^2$

$$\vec{\Gamma}(A) = \ell \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} - \dot{\theta}^2 \left[\ell \cos\theta \, \vec{i} + \ell \sin\theta \, \vec{j} \right]$$

2)

$x = \ell \sin\frac{\pi}{4} \cos\varphi$

$y = \ell \sin\frac{\pi}{4} \sin\varphi$

$z = \ell \cos\frac{\pi}{4}$

← نعتبر أن الوسيط هو وسيط مستقل
وحيد وهو φ يتغير موضع القضيب لمعرفة A'
موضع الرتبة A و O لكن O معلومة بالتالي لدينا ثلاث وسطاء
x_A ، y_A ، z_A لدينا قيد طول القضيب ℓ وقيد أخر هو الزاوية $\frac{\pi}{4}$ أي
ثلاث وسطاء و قيدين بالتالي لدينا وسيط مستقل واحد لمعرفته

الوسيط
في جملة المستوي الوضعي
لحساب سرعة A

$x_A = \ell \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha$

$y_A = \ell \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$

$z_A = \ell \cos\frac{\pi}{4}$

$$x_A = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\alpha \quad ; \quad y_A = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\sin\alpha \quad ; \quad z_A = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} \quad \text{----} (*)$$

لحساب السرعة هناك طريقتين الأولى أن نشتق العلاقة (*)

والطريقة الثانية هي استخدام العلاقة $\vec{V}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$

حيث $\omega = \dot{\alpha}\,\vec{k}$

ولحساب التسارع نقوم باشتقاق السرعة

مسألة 2: قرص دائري يدور حول محور OZ عمودي على مستويه ومار
من مركزه المطلوب
احسب السرعة وتسارع نقطة ما من المحيط الخارجي

الحل:

OXY جملة مقارنة ثابتة

OX_1Y_1 جملة متماسكة مع القرص

حركة مغزلية تمثل حركة دورانية

[illegible] حول المبدأ O